1. V urně máme tři kuličky a každá z nich má bílou nebo černou barvu. V každém kroku náhodně vytáhneme jednu kuličku. S pravděpodobností $\frac{1}{2}$ ji vrátíme zpět do urny a s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ místo ní do urny dáme kuličkou opačné barvy. Označmě $X_n$ počet kuliček bílé barvy v urně po $n$-tém kroku pro $n \in \mathbb{N}_0$.

   (a) Uvědomte si, že $\{X_n\}$ je homogenní Markovův řetězec. (0 bodů)

   Důsledný přístup znamená ověřit markovskou podmínku:

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \tag{1}$$

   v případech, že pravděpodobnost jevu v podmínce na levé straně je kladná, a ověřit podmníku homogenity říkající, že např. pravá strana (1) by neměla záviset na hodnotě $n \in \mathbb{N}_0$. Postačující podmínkou pro rovnost (1) je, pokud pravděpodobnost na levé straně je nezávislá na hodnotách $i_{n-1}, \ldots, i_0$. Zde je to z povahy pokusu zřejmé, neboť pravděpodobnost, že bude vytažena bílá či černá koule závisí čistě na počtu bílých koulí v urně a protože rozdíl $X_{n+1} - X_n$ závisí na tom, zda bude tažena bílá koule a na další nezávislé veličině s alternativním rozdělením s parametrem $1/2$.

   Formální přístup by vyžadoval zavést pomocné nezávislé[1] náhodné veličiny $V_n \sim R\{1, 2, 3\}$ udávající, která kulička v pořadí urně je vybrána a $U_n \sim R\{0, 1\}$ říkající, zda byla vytažená kulička nahrazena v urně kuličkou opačné barvy. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že bílé kuličky mají nižší pořadová čísla než černé. Pak dostaneme vyjádření např. ve tvaru

$$X_{n+1} - X_n = U_n [2 \cdot 1_{[X_n < V_n]} - 1]. \tag{2}$$

   Jakmile máme zadání úlohy takto formálně podchyceno, je možné markovskou podmnínku (1) ověřit tím, že vyjádříme obě strany rovnosti ve tvaru

$$P(j - i = U_n [2 \cdot 1_{[i < V_n]} - 1]) = P(j - i = U_1 [2 \cdot 1_{[i < V_1]} - 1]).$$

   Tím, že tato hodnota nezávisí na $n$ máme ověřenu i homogenitu řetězce.

   (b) Sestavte matici pravděpodobností přechodu. (1 bod)

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

   (c) Klasifikujte stavy řetězce. (1 bod)

   Všechny stavy jsou vzájemně dosažitelné. Řetězec je tak nerozložitelný a všechny stavy jsou stejného typu. Protože jde o konečný řetězec, jsou všechny stavy trvalé nenulové. Jsou také neperiodické, protože např. ze stavu 0 je možné se do něj vrátit po 1 kroku s kladnou pravděpodobností.

   (d) Najděte stacionární rozdělení (pokud existuje). (2 body)

   Stacionární rozdělení je dáno kromě podmínkou $1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3$ také podmínkou $\pi^{\intercal} = \pi^{\intercal} \mathbb{P}$ ve tvaru

$$\pi_0 = \tfrac{1}{2}\pi_0 + \tfrac{1}{6}\pi_1 \tag{3}$$
$$\pi_1 = \tfrac{1}{2}\pi_0 + \tfrac{1}{2}\pi_1 + \tfrac{1}{3}\pi_2 \tag{4}$$
$$\pi_2 = \tfrac{1}{3}\pi_1 + \tfrac{1}{2}\pi_2 + \tfrac{1}{2}\pi_3 \tag{5}$$
$$\pi_3 = \tfrac{1}{6}\pi_2 + \tfrac{1}{2}\pi_3 \tag{6}$$

   Z první a poslední rovnice dostaneme po řadě podmínky $\frac{1}{2}\pi_0 = \frac{1}{6}\pi_1$ a $\frac{1}{2}\pi_3 = \frac{1}{6}\pi_2$. Dosazením do centrálních rovnic pak dostaneme rovnost $\pi_1 = \pi_2$. Stacionární rozdělení je tak tvaru

$$\pi^{\intercal} = \pi_0(1, 3, 3, 1) = \tfrac{1}{8}(1, 3, 3, 1).$$

   Hodnotu $\pi_0$ jsme určili tak, aby výsledný vektor dal v součtu hodnotu 1.

[1] Předpokládáme, že nově uváděné veličiny jsou všechny navzájem nezávislé a také nezávislé s hodnotou $X_0$.

(e) Spočtěte absolutní pravděpodobnosti po jednom kroku při rovnoměrném počátečním rozdělení (na množině $\{0,1,2,3\}$). (1 bod)

$$p(0)^{\mathrm{T}} = \tfrac{1}{4}\,(1,1,1,1), \quad p(1)^{\mathrm{T}} = p(0)^{\mathrm{T}}\mathbb{P} = \tfrac{1}{4}\,(1,1,1,1)\,\mathbb{P} = \tfrac{1}{4}(\tfrac{2}{3},\tfrac{4}{3},\tfrac{4}{3},\tfrac{2}{3}) = (\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{6}).$$

2. Mějme markovský řetězec s množinou stavů $\{1,2,3,4,5\}$ a s maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(a) Klasifikujte stavy řetězce. (1 bod)

Množina $\{1,3,5\}$ je uzavřená konečná a všechny stavy v ní jsou navzájem dosažitelné. Proto jsou stavy 1,3,5 trvalé nenulové a se stejnou periodicitou. Zde jsou aperiodické, neboť např. $p_{55} = \frac{1}{2} > 0$. Stavy 2,4 jsou přechodné, neboť jsou z nich dosažitelné stavy, které ovšem nejsou vzájemně dosažitelné např. $2 \to 1 \not\to 2, 4 \to 3 \not\to 4$. Stav 2 je aperiodický, neboť $p_{22} = \frac{1}{3} > 0$ a stejně tak stav 4, neboť je vzájemně dosažitelný se stavem 4 (a tedy stejného typu).

(b) Najděte stacionární rozdělení (pokud existuje). (2 body)

Kromě normující podmínky musí stacionární rozdělení splňovat soustavu rovnice $\pi^{\mathrm{T}} = \pi^{\mathrm{T}}\mathbb{P}$ ve tvaru

$$\pi_1 = \tfrac{1}{2}\,\pi_1 + \tfrac{1}{6}\,\pi_2 + \tfrac{1}{3}\,\pi_3 \tag{7}$$
$$\pi_2 = \tfrac{1}{3}\,\pi_2 + \tfrac{2}{3}\,\pi_4 \tag{8}$$
$$\pi_3 = \tfrac{1}{4}\,\pi_1 + \tfrac{1}{6}\,\pi_2 + \tfrac{2}{3}\,\pi_3 + \tfrac{1}{6}\,\pi_4 + \tfrac{1}{2}\,\pi_5 \tag{9}$$
$$\pi_4 = \tfrac{1}{3}\,\pi_2 \tag{10}$$
$$\pi_5 = \tfrac{1}{4}\,\pi_1 + \tfrac{1}{6}\,\pi_4 + \tfrac{1}{2}\,\pi_5. \tag{11}$$

Sečtením soustavy rovnic $\pi^{\mathrm{T}} = \pi^{\mathrm{T}}\mathbb{P}$ vždy dostaneme $\pi^{\mathrm{T}}1_S = \pi^{\mathrm{T}}\mathbb{P}1_S = \pi^{\mathrm{T}}1_S = 1$ rovnici, která vždy platí. Zde $1_S$ je vektor samých 1 idexovaný prvky množiny $S$. Využili jsme toho, že matice $\mathbb{P}$ je stochastická, a tedy součet na každém řádku má 1, což lze zapsat v maticovém vyjádření ve tvaru $\mathbb{P}1_S = 1_S$. Můžeme tak jednu z pěti rovnic ignorovat, vybereme si např. tu prostřední. Druhá a čtvrtá rovnice dávají pouze triviální řešení pro hodnoty $\pi_2 = 0 = \pi_4$, což v klasifikaci odpovídá tomu, je jsou to stavy přechodné. Z první rovnice pak dostaneme podmínku ve tvaru $\frac{1}{2}\,\pi_1 = \frac{1}{3}\,\pi_3$ a podobně z poslední rovnice $\frac{1}{2}\,\pi_5 = \frac{1}{4}\,\pi_1$. Celkem pak dostáváme stacionární rozdělení ve tvaru

$$\pi^{\mathrm{T}} = \pi_5(2,0,3,0,1) = \tfrac{1}{6}\,(2,0,3,0,1) = (\tfrac{1}{3},0,\tfrac{1}{2},0,\tfrac{1}{6}).$$

(c) Najděte matici $U$ pradvěpodobností absorpce do množiny trvalých stavů. (2 body)

Seřadíme stavy tak, že nejprve uvedeme trvalé stavy a pak teprve přechodné s tím, že jinak pořadí mezi stavy zachováváme. V tomto přečíslování sepíšeme matici $(Q,R)$ obsahující v řádcích rozdělení přechodu z přechodných stavů $\{2,4\}$ s tím, že nyní pořadí stavů je $1,3,5,2,4$. Dostáváme

$$(Q,R) = \left(\begin{array}{ccc|cc} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 \end{array}\right).$$

Dále počítáme

$$I - R = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad (I-R)^{-1} = \frac{1}{\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matici pravděpodobností absorpce pak dostaneme ze vzorce

$$U = (I-R)^{-1}Q = \tfrac{3}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \tfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pravděpodobnostní rozdělění absorpce do stavů 1,3,5 je tak ze stavu 2: $\frac{1}{8}(3,4,1) = (\frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8})$ a ze stavu 4: $\frac{1}{4}(1,2,1) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

3. Mějme markovský řetězec s množinou stavů $\mathbb{N}_0$ a s maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Klasifikujte stavy řetězce a najděte stacionární rozdělení (pokud existuje). (5 bodů)

Řetězec je nerozložitelný, a všechny stavy jsou tak stejného typu. Všechny stavy budou trvalé nenulové, neboť bude existovat stacionární rozdělení (viz. níže). Stavy jsou aperiodické, neboť např. $p_{00} = \frac{1}{2} > 0$.

Kromě normující podmínky $1 = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n$ máme k dispozici následující rovnice

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \tfrac{1}{2}\pi_0 + \tfrac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty} \pi_k \\ \pi_1 &= \tfrac{1}{2}\,\pi_0 + \tfrac{1}{3}\,\pi_1 \\ \pi_{k+1} &= \tfrac{1}{3}\pi_k + \tfrac{1}{3}\,\pi_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Podobně jako u jiných příkladů, jednu rovnost dostaneme z ostatních. Zde můžeme pominout např. první rovnici. Ze druhé dostaneme vztah $\frac{2}{3}\,\pi_1 = \frac{1}{2}\,\pi_0$. Z posledního řádku dostaneme požadavek $\pi_{k+1} = \frac{1}{2}\,\pi_k; k \in \mathbb{N}$. Tedy $\pi_{k+1} = 2^{-k}\pi_k, k \in \mathbb{N}$. Z normující podmínky pak dostaneme požadavek

$$1 = \pi_0 + \sum_{k\in\mathbb{N}} \pi_k = \pi_1(\tfrac{4}{3} + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}) = \pi_1(\tfrac{4}{3} + 2) = \tfrac{10}{3}\,\pi_1.$$

Tedy $\pi_1 = 0.3$, dále $\pi_0 = \frac{4}{3}\cdot 0.3 = 0.4$ a $\pi_k = 2^{-(k-1)}0.3, k \in \mathbb{N}$.